1 Trigonometrické Fourierovy řady

Systém funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

tvoří úplnou ortonormální množinu v prostoru $L^2([-\pi,\pi])$ (pro funkce s reálnými i komplexními hodnotami). Obdobně pro komplexní $L^2([-\pi,\pi])$ použít systém

$$\frac{e^{nx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Pro $f \in L^2([-\pi,\pi])$ položíme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a pro $x \in [-\pi,\pi]$

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx).$$

Věta 1 (o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady)**.** *Nechť f je 2π-periodická spojitá funkce, která je po částech spojitě diferencovatelná. Potom*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty,$
2. $s_n \rightrightarrows f$ *na* $[0,2\pi]$.

Poznámky a příklady. *1. Pro obecnou periodu $L > 0$ pracujeme s ortogonální systémem*

$$1, \quad \cos\frac{2\pi nx}{L}, \quad \sin\frac{2\pi nx}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2. *Pokud je f lichá, platí $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, pokud je f sudá, platí $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

3. *Prototyp Fourierovy řady pro nespojitou funkci: nechť g je 2π-periodická a $g(x) = \frac{x}{\pi}$, $x \in (-\pi,\pi)$, potom*

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Dále

(a) *řada konverguje bodově k průměru jednostranných limit (na $\mathbb{R}$),*

(b) *řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(-\pi,\pi)$.*

4. *(věta o konvergenci Fourierovy řady k průměru) Nechť f je 2π-periodická funkce, která je po částech spojitě diferencovatelná. Potom*

   (a) $s_n \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$,

   (b) *pokud je f spojitá na (α, β), potom $s_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (α, β).*

2 Funkce komplexní proměnné

2.1 Cauchy-Riemannovy rovnice a jejich důsledky

Definice 2 (Cauchy-Riemannovy rovnice a komplexní derivace)**.** *Nechť $f : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ je funkce ve tvaru $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = a+bi \in A$ a nechť existuje $\delta > 0$, že $U(z,\delta) \subset A$. Derivaci funkce f v bodě z definujeme jako*

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z},$$

je-li limita napravo definována. Pokud existují $\nabla u(a,b)$ a $\nabla v(a,b)$, potom rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,b), \tag{1}$$

*nazýváme **Cauchy-Riemannovými rovnicemi** (funkce f v bodě z).*

*Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Potom funkci $f : \Omega \to \mathbb{C}$ zazveme **holomorfní** (na Ω) pokud ve všech bodech $z \in \Omega$ existuje $f'(z)$. Množinu všech funkcí holomorfních na Ω budeme značit $H(\Omega)$.*

Lemma 3 (tvar komplexní derivace)**.** *Nechť $f : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ je funkce ve tvaru $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = a+bi \in A$ a nechť existuje $f'(z)$. Potom platí*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a,b).$$

Speciálně, dané parciální derivace existují a pro f v bodě z platí Cauchy-Riemannovy rovnice.

Věta 4 (Cauchy-Riemannovy rovnice a komplexní derivace)**.** *Nechť $f : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ je funkce ve tvaru $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = a+bi \in A$ a nechť existuje $\delta > 0$, že $U(z,\delta) \subset A$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$f'(z)$ existuje,*

2. *u a v mají totální diferenciál v (a,b) a platí (1).*

Poznámky a příklady. *1. Pro komplexní derivaci platí stejná pravidla pro součet, součin, podíl a skládání jako známe z $\mathbb{R}$.*

2. • *Polynomy a mají komplexní derivaci na celém $\mathbb{C}$.*

- *Racionální funkce mají komplexní derivaci na celém svém definičním oboru (tedy mimo nulové body jmenovatele).*
- *Funkce definované mocninnou řadou mají komplexní derivaci uvnitř kruhu konvergence.*

Všechny tyto derivace lze spočítat podle vzorečků, které známe z $\mathbb{R}$.

3. *Je-li $f = u + iv \in H(\Omega)$, potom jsou funkce u i v harmonické (na Ω chápané jako podmnožina $\mathbb{R}^2$), tedy platí $\Delta u = \Delta v = 0$.*

Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

2.2 Křivkový integrál v $\mathbb{C}$

Budeme uvažovat křivky $\gamma : I \to \mathbb{C}$, kde I je interval. Tedy

$$\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$$

pro nějaké funkce $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$. Její derivaci $\gamma'(t)$ definujeme jako

$$\gamma'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t).$$

Všechny typy křivek (C^2, regulární, prosté,...) definujeme alalogicky jako v $\mathbb{R}^2$. Stejné tak i délku křivky.

Pro funkci $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ definujeme integrál

$$\int_a^b f = \int_a^b u + i \int_a^b v.$$

Definice 5 (křivkový integrál v $\mathbb{C}$)**.** *Nechť $\gamma : I \to \mathbb{C}$ je křivka a $f : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ je definovaná na $\langle\gamma\rangle$. Potom definujeme integrál z f přes křivku γ jako*

$$\int_\gamma f = \int_I (f \circ \gamma)\gamma',$$

pokud má integrál napravo smysl (jako Lebesgueův, případně ale i Newtonův).

Křivkový integrál v $\mathbb{C}$ jako křivkový integrál 2. druhu: je-li $f = u + vi$, potom

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (u, -v) \cdot \vec{ds} + i \int_\gamma (v, u) \cdot \vec{ds},$$

je-li integrál nalevo definován.

Lemma 6 (odhad křivkového integrálu). *Platí*

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq 4 \cdot l(\gamma) \cdot \sup_{z\in\langle\gamma\rangle} |f(z)|.$$

Definice 7 (primitivní funkce). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f, F : \Omega \to \mathbb{C}$ jsou funkce. Funkci F nazveme primitivní funkcí k f na Ω, pokud platí*

$$F'(z) = f(z), \quad z \in \Omega.$$

Lemma 8 (výpočet křivkového integrálu pomocí primitivní funkce). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, F je primitivní funkcí k f na Ω, f je spojitá na Ω a $\gamma : [a, b] \to \Omega$ je po částech hladká křivka. Potom*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Definice 9 (křivková souvislost). *Množinu $A \subset \mathbb{C}$ nazveme křivkově souvislou, pokud pro každá $a, b \in A$ existuje spojitá křivka $\gamma : [\alpha, \beta] \to A$, pro kterou platí $\gamma(\alpha) = a$ a $\gamma(\beta) = b$.*

Oblastí budeme nazývat otevřenou křivkově souvislou množinu.

Věta 10 (o existenci primitivní funkce). *Nechť $\Omega \subset C$ je oblast a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je funkce, potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *f má na Ω primitivní funkci*
2. *$\int_\gamma f = \int_\kappa f$, pro libovolné dvě křivky $\gamma : (a, b) \to \Omega$, $\kappa : (\alpha, \beta) \to \Omega$, pro kterép latí $\gamma(a) = \kappa(\alpha)$, $\gamma(b) = \kappa(\beta)$.*

Věta 11 (Cauchyho). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $\partial\Omega$ lze popsat jako prostou, po částech regulární a C^1 křivku γ. Nechť dále $\overline{\Omega} \subset A$ a $f \in H(A)$, potom*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Věta 12 (Cauchyho vzorec). *Nechť $f \in H(\Omega)$, $r > 0$ a $\overline{U(a, r)} \subset \Omega$. Potom pro každé $z \in U(a, r)$ platí*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

kde $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Věta 13 (holomorfní funkce jako mocninná řada). *Je-li $f \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$, $r > 0$ a $U(z, r) \subset \Omega$, potom*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw\right)(z - a)^n, \quad z \in U(z, r),$$

speciálně

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw,$$

kde $\gamma_r(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $0 < r < R$.

Definice 14 (Laurentova řada)**.** *Laurentovou řadou se středem* $a \in \mathbb{C}$ *nazýváme formální řadu*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{2}$$

Řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *pak nazýváme její regulární částí a řadu* $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n :=$ $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ *její hlavní částí. Říkáme, že Laurentova řada* (2) *konverguje (v bodě z), pokud (v z) konvergují její regulární i hlavní část.*

Je-li $R \in [0, \infty]$ poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ a $\rho \in [0, \infty]$ poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$. Položme $R = \frac{1}{\rho}$. Potom Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konverguje na množině

$$U(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Věta 15 (holomorfní funkce jako Laurentova řada)**.** *Nechť* $r, R \in [0, \infty]$ *a* $f \in H(U(a, r, R))$*, potom platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n, \quad z \in U(a, r, R),$$

kde $\gamma_r(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r < \rho < R$.

Využití Laurentových řad k výpočtu Fourierových řad: nechť $0 < \varepsilon < 1$ a $f \in H(U(0, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$ s Laurentovou řadou $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Potom pro ($2\pi$-periodickou) funkci $\varphi : t \mapsto f(e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\, dt \right) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \varphi, \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}.$$

2.3 Komplexní logaritmus a obecná mocnina

Věta 16 (o inverzní funkci k holomorfní funkci)**.** *Nechť $f \in H(U(z,r))$ a $f'(z) \neq 0$. Potom je na okolí z funkce f prostá a f^{-1} je holomorfní na okolí $w = f(z)$. Navíc platí (známý vzoreček) $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}$.*

Pro $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (nebo i $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) můžeme definovat

$$\log z = \log|z| + i \arg z.$$

Dostaneme tak inverzní funkci k funkci $e^z|_U$, kde $U = \{x+iy \in \mathbb{C} : y \in (-\pi, \pi)\}$ (resp. pro $\{x + iy \in \mathbb{C} : y \in (-\pi, \pi]\}$). Této funkci se říká hlavní hodnota logaritmu.

Obecnou mocninu pak definujeme (stejně jako v $\mathbb{R}$) předpisem $z^a = e^{a \log(z)}$.

Logarirmuse ale můžeme definovat i jako primitivní funkci k $\frac{1}{z}$. Použijeme následující obecnější verzi Cauchyho věty: Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast. Potom pro každou zavřenou C^1 křivku γ splňující $\langle\gamma\rangle \subset \Omega$ a funkci $f \in H(\Omega)$ platí

$$\int_\gamma f = 0.$$

Potom pro každou $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jednoduše souvislou oblast splňující $1 \in \Omega$ existje funkce $\log_\Omega \in H(\Omega)$

1. $e^{\log_\Omega z} = z$, $z \in \Omega$,
2. existuje $\delta > 0$, že $\log_\Omega = \log$ na $(1-\delta, 1+\delta) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2.4 Klasifikace singularit

Definice 17 (singularity holomorfních funkcí)**.** *Říkáme, že funkce f má v bodě a*

- ***izolovanou singularitu**, pokud existuje $r > 0$, že $f \in H(U(a,0,r))$ (a tedy má na $U(a,0,r)$ Laurentovu řadu $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$)*
- ***odstranitelnou singularitu**, pokud má v a izolovanou singularitu a S má nulovou hlavní část,*
- ***pól**, pokud má v a izolovanou singularitu a hlavní část S má jen konečně nenulových članů, nejvyšší $n \in \mathbb{N}$ splňující $c_{-n} \neq 0$ nazýváme jeho **násobností***
- ***podstatnou singularitu**, pokud má v a izolovanou singularitu a hlavní část S má nekonečně nenulových členů.*

Z definice typů singularit okamžitě vyplývá:

- má-li f v z odstranitelnou singularitu, potom lze f holomorfně rozšířit na okolí z,
- má-li f v z pól násobnosti k, potom existuje okolí $U(z,\rho)$ a $g \in H(U(z,\rho))$, $g(z) \neq 0$, že $f(w) = \frac{g(w)}{(w-z)^k}$, $w \in U(z,\rho)$.

Věta 18 (charakterizace typů singularit). *Nechť f má v bodě z izolovanou singularitu, potom je ekvivalentní*

1. *f má v z odstranitelnou singularitu,*
2. *$\lim\limits_{w\to z} f(w)$ existuje (vlastní),*
3. *f je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu z.*

Dále je ekvivalentní

1. *f má v z pól,*
2. *$\lim\limits_{w\to z} f(w) = \infty$.*

Nakonec je ekvivalentní

1. *f má v z podstatnou singularitu,*
2. *pro každé dostatečně malé $\rho > 0$ platí $\overline{f(U(z,0,\rho))} = \mathbb{C}$.*

Poznámky a příklady.

- *(kořen a násobnost kořenu) Nechť f je holomorfní na okolí bodu a a $n \in \mathbb{N}$, potom říkáme, že f má f a kořen násobnosti n, pokud*

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0,\dots,n-1, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

  Platí následující: f má v bodě a pól násobnosti k právě tehdy, když $\frac{1}{f}$ má (po dodefinování hodnotou 0 v a) v bodě a kořen násobnosti k.

- *(Picardova věta) Pro podstatné singularity platí dokonce následující silnější tvrzení: má-li f v a podstatnou singularitu, potom pro každé dostatečně malé $\rho > 0$ obsahuje množina $\mathbb{C} \setminus f(U(z,0,\rho))$ nejvýše jeden bod.*

Definice 19 (reziduum). *Nechť f má v bodě a izolovanou singularitu a Laurentovu řadu $S = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, potom koeficient c_{-1} nazýváme **reziduem f v bodě** a (zn. $\mathrm{Res}(f,a)$).*

Věta 20 (reziduová věta). *Nechť $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $\partial\Omega$ lze popsat jako kladně orientovanou, prostou, po částech regulární a C^1 křivku γ. Nechť dále $a_1,\dots,a_N \in \Omega$, $\overline{\Omega} \subset A$ a $f \in H(A \setminus \{a_1,\dots,a_N\})$, potom*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}(f,a_n).$$

Věta 21 (o výpočtu reziduí). *Platí*

1. *má-li f v bodě a odstranitelnou singularitu, potom* $\operatorname{Res}(f,a)=0$,

2. *má-li f v bodě a pól násobnosti nejvýše n, potom* $\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}\left[\frac{f(z)(z-a)^n}{(n-1)!}\right]^{(n-1)}$,

3. *jsou-li f a g holomorfní na okolí bodu a a $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$, potom* $\operatorname{Res}(\frac{f}{g},a)=\frac{f(a)}{g'(a)}$,

4. *je-li f holomorfní na okolí bodu a a g má v a pól násobnosti 1, potom* $\operatorname{Res}(fg,a)=f(a)\operatorname{Res}(g,a)$.

Poznámky a příklady. 1. *(lemma o obcházení pólu) Nechť f má v bodě a pól násobnosti 1, $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$ a $\gamma_\rho:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$, $0<\rho<r$ je definována jako $\gamma_\rho: t\mapsto a+\rho e^{it}$. Potom*

$$\lim_{\rho\to 0+}\int_{\gamma_\rho} f=(\beta-\alpha)i.$$

2. *(Jordanovo lemma) Nechť $R>0$ a f je spojitá vzhledem k množině $A=\{z\in\mathbb{C}:\ Im(z)\ge 0, |z|\ge R\}$, $\kappa\ge 0$ a $\gamma_\rho:[0,\pi]\to\mathbb{C}$, $R<\rho$ je definována jako $\gamma_\rho: t\mapsto \rho e^{it}$. Označme*

$$M_\rho=\max\{|f(z)|:\ z\in\langle\gamma_\rho\rangle\}$$

Nechť platí aplespoň jedna z podmínek

- $\kappa=0$ *a* $\rho M_\rho\to 0$, $\rho\to\infty$,
- $\kappa>0$ *a* $M_\rho\to 0$, $\rho\to\infty$,

potom $\lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_\rho} e^{i\kappa z}f(z)\,dz=0.$

Analogické tvrzení platí i pro dolní polorovinu.

3. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^6}\,dx=\frac{2}{3}\pi,$

4. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^3}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ *(pozor, integrál existuje jen ve smyslu hlavní hodnoty).*

Definice 22 (singularity a reziduum v nekonečnu). *Říkáme, že komplexní funkce f má v nekonečnu*

- ***izolovanou singularitu***, *pokud $f\in H(U(0,r,\infty))$ pro nějaké $r>0$*
- ***odstranitelnou singularitu***, *pokud má $f(\frac{1}{z})$ odstranitelnou singularitu v 0,*

- ***pól*** *násobnosti n, pokud má $f(\frac{1}{z})$ pól násobnosti n v 0,*
- ***podstatnou singularitu****, pokud má $f(\frac{1}{z})$ podstatnou singularitu v 0.*

Má-li f v nekonečnu izolovanou singularitu, potom definujeme ***reziduum*** *f v nekonečnu jako*

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz,$$

kde $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ a $\rho > 0$ dostatečně velké (podle Cauchyovy věty víme, že hodnota nebude záviset na ρ).

Poznámky a příklady.

1. *Je-li $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ Laurentova řada f na $U(0,r,\infty)$, potom $\operatorname{Res}(f,\infty) = -c_{-1}$.*
2. *Platí $\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right)$.*
3. *Je-li $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_1,\dots,a_n\})$ potom $\operatorname{Res}(f,\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,a_k) = 0$*
4. *Některé integrály spočítáme snadněji s použitím rezidua v ∞ - $\int_\gamma \frac{z^6}{1+z^7}\,dz = 2\pi i$, kde $\gamma(t) = 3e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.*

2.5 Teoretické důsledky Cauchyova vzorce a Caychyovy věty

Věta 23 (Liuvillova věta (zobecněná))**.** *Nechť $f \in H(\mathbb{C})$, $N \in \mathbb{N}$ a existuje $C > 0$, že $\max_{|z|=R} |f(z)| \leq CR^N$, $R > 0$, potom f je polynom stupně nejvýše N. Speciálně, je-li $|f|$ omezená na $\mathbb{C}$, potom je f konstantní na $\mathbb{C}$.*

Věta 24 (základní věta algebry)**.** *Nechť P je polynom stupně alespoň 1, potom P má kořen v $\mathbb{C}$.*

Věta 25 (o jednoznačnosti pro holomorfní funkce)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f, g \in H(\Omega)$ a $N = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, $M = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. Potom*

1. *má-li N v Ω hromadný bod, potom $f = 0$ na Ω,*
2. *má-li M v Ω hromadný bod, potom $f = g$ na Ω.*

Reformulací Cauchyova vzorce pro kruh dostaneme tzv. větu o průměru: je-li $f \in H(\Omega)$, $z = a + bi \in \Omega$ a $\overline{U(z,r)} \subset \Omega$, potom

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tilde{f}\,ds,$$

kde $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$ a $\gamma(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t)$ (integrál napravo chápeme po složkách jako křivkový integrál 1. druhu), otdud již snadno dostaneme:

Věta 26 (princip maxima modulu)**.** *Nechť $f \in H(\Omega)$ a $|f|$ nabývá globálního maxima vzhledem k Ω. Potom f je konstantní na Ω.*

Věta 27 (Morerova (pro obdélníky))**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená a f je komplexní funkce spojitá na Ω. Nechť navíc platí*

$$\int_\gamma f = 0,$$

kdykoliv je γ uzavřená prostá a po částech C^1 a $\langle\gamma\rangle \subset \Omega$ je obdélník. Potom $f \in H(\Omega)$.

Poznámky a příklady. *1. Morerova věta platí i pro jiné systémy křivek než obdélníky (trojúhelníky, uzavřené po částech C^1 křivky).*

2. Jedním z důsledků Morerovy věty je následující věta o nalepování: nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, f je spojitá na Ω a p je přímka. Pokud $f \in H(\Omega \setminus p)$, potom $f \in H(\Omega)$.

3 Fourierova transformace

Definice 28 (Fourierova transformace)**.** *Fourierovou transformací funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ budeme nazývat funkci $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

inverzní Fourierovou transformací funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ pak budeme nazývat funkci $\mathcal{F}^{-1}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i2\pi\xi\cdot x}\,dx,$$

(v obou případech za předpokladu, že itegrály vpravo mají na $\mathbb{R}^d$ smysl)

Poznámky a příklady. *1. Používají se i jiné (velmi podobné) definice Fourierovy tansformace, například*

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\omega\cdot\xi}\,dx, \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\omega\cdot\xi}\,dx,$$

ale i další.

2. Používá se rovněž zkrácené značení $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ a $\mathcal{F}^{-1}(f) = \hat{\hat{f}}$

3. Pro $f \in L_1$ platí:

- $|\hat{f}(\xi)| \leq ||f||_1$, $\xi \in \mathbb{R}^d$,
- $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$, *tj.* $\hat{f}$ *je spojitá (dokonce stejnoměrně) a* $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$,

- *je-li* $g(x) = f(x+y)$, *potom* $\hat{g}(\xi) = e^{i2\pi y\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$,
- *je-li* $g(x) = f(\alpha x)$, $\alpha \neq 0$, *potom* $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|^d} f\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$.

Definice 29 (konvoluce)**.** *Konvolucí funkcí* $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *nazíváme funkci* $f \star g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *definvanou jako*

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

(má-li integrál napravo na $\mathbb{R}^d$ *smysl).*

Poznámky a příklady.

1. *Jsou-li* $f, g \in L_1$, *potom* $f \star g \in L_1$ *(platí i odhad* $||f \star g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$*). Má tedy smysl psát* $\hat{f}, \hat{g}$ *i* $\widehat{f \star g}$*, pro které navíc platí* $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$.

2. *Pro* $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ *platí* $\mathcal{F}(f) = f = \mathcal{F}^{-1}(f)$.

Definice 30 (prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$)**.** *Pro* $d \in \mathbb{N}$ *definujeme Schvartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *jeko prostor všech funkcí* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *pro které platí*

$$||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} ||x^\alpha D^\beta f(x)|| < \infty,$$

pro každou dvojici multiindexů α *a* β.

Říkáme, že posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *konverguje k funkci* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *ve Scharzově prostoru (*$f_n \overset{\mathcal{S}}{\to} f$*), pokud platí*

$$||f_n - f||_{\alpha,\beta} \to 0, \quad n \to \infty,$$

pro každou dvojici multiindexů α *a* β*. Dále definujeme prostor* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *jeko prostor všech funkcí* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *pro které platí*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^d$.

Poznámky a příklady.

1. *Platí* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subsetneq L^1(\mathbb{R}^d)$, $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

2. *Pro* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, P *polynom,* $a, b \in \mathbb{R}$*(nebo* $\mathbb{C}$*)* *a* α *multiindex platí*

$$af + bg, Pf, fg, D^\alpha f, f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

3. *Pro* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *a* α *multiindex platí* $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i2\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

4. *Pro* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *platí* $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$*, je-li* α *multiindex, potom* $D^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-i2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$

Věta 31 (Fourierova transformace na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*, potom*

1. $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}^{-1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

2. $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$.

Na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ i $L(\mathbb{R}^d)$ platí

$$\int f\mathcal{F}(g) = \int \mathcal{F}(f)g, \quad \int f\mathcal{F}^{-1}(g) = \int \mathcal{F}^{-1}(f)g$$

to dává možnost definovat vzoreček $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ pro funkce $f \in L^1$ pro které platí $\mathcal{F}(f) \in L^1$.

Zde využijeme následující fakt: pokud pro $f \in L^1_{loc}$ platí $\int f\varphi = 0$, pro všechny $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, potom $f = 0$.

3.1 Fourierova transformace na $L^2(\mathbb{R}^d)$

Je založena na následujích faktech:

1. pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ platí $||f||_2 = ||\mathcal{F}(f)||_2 = ||\mathcal{F}^{-1}(f)||$,
2. prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $L^2(\mathbb{R}^d)$,

Volme $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Je-li $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $||f_n - f||_2 \to 0$. Potom je posloupnost $\{\mathcal{F}(f_n)\}$ cauchyovská v $L^2(\mathbb{R}^d)$. Protože je $L^2(\mathbb{R}^d)$ úplný, má $\{\mathcal{F}(f_n)\}$ limitu, kterou označíme $\mathcal{F}(f)$. Obdobné pro $\mathcal{F}^{-1}$.

Poznámky a příklady. *1. pro $f \in L^2$ platí*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{U(0,R)} f(x)e^{-i2\pi x\cdot\xi}$$

a

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{U(0,R)} f(\xi)e^{i2\pi x\cdot\xi}$$

2. takto například spočítáme $\mathcal{F}(\frac{x}{1+x^2})(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|}$

Nakonec jsme si ukázali, jak za pomocí Fourierovy transformace řešit PDR (na příkladu rovnice $\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f = 0$).

4 Teorie distribucí

Definice 32 (prostory $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$)**.** *Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřenou definujeme $\mathcal{D}(\Omega)$ (prostor testovacích funkcí na Ω) jako prostor všech (reálných či komplexních) funkcí $f \in C^\infty(\Omega)$ s kompaktním nosičem (tj. $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ je kompaktní podmnožina Ω).*

Říkáme, že posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ (značíme $\varphi_n \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$) pokud existuje $K \subset \Omega$, že

1. $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\operatorname{supp}\varphi \subset K$,

2. $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ *pro každý multiindex* α.

Prostor $\mathcal{D}'(\Omega)$ *definujeme jako prostor všech lineárních zobrazení (funkcionálů)* $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$*, která jsou spojitá v následujícím smyslu: pokud* $\varphi_n \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$*, potom* $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$*,* $n \to \infty$*. Funkciánály patřící do* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *nazýváme distribuce na* Ω.

Poznámky a příklady. 1. *Podmínka* $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ *kdykoliv* $\varphi_n \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$ *je (díky linaritě) ekvivalentní podmínce* $T(\varphi_n) \to 0$ *kdykoliv* $\varphi_n \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$.

2. *Místo* $T(\varphi)$ *budeme často psát* $\langle T, \varphi\rangle$.

3. *Pro* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *(tedy* $f \in L^1(K)$ *pro každý kompakt* $K \subset \Omega$*) definujeme distribuci* $T_f(\varphi) = \int f\varphi$.

   Obecněji pro každou Radonovu míru μ *můžeme definovat distribuci* $T_\mu(\varphi) = \int \varphi\, d\mu$.

   Ještě obecněji pro α *multiindex je* $\varphi \mapsto \int D^\alpha \varphi\, d\mu$ *distribuce.*

4. *Základním příkladem distribuce reprezentující míru je Diracova distribuce v bodě* $b \in \mathbb{R}^d$ *definovaná jako* $T_{\delta_b}(\varphi) = \int f\, d\delta_b = \varphi(b)$.

5. *Pro funkci* f *mající integrál ve smyslu hlavní hodnoty můžeme definovat jí odpovídající distribuci* $T_{p.v.f}(\varphi) = p.v. \int f\varphi$*. Například*

$$T_{p.v.\frac{1}{x}}(\varphi) = p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.$$

4.1 Základní operace na distribucích

Definice 33 (posunutí, škálování, derivace a násobení funkcí v $\mathcal{D}'(\Omega)$)**.** *Pro* $T \in D'(\Omega)$ *definujeme*

1. *posunutí* T *o* $a \in \mathbb{R}^d$ *jako* $\langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle$*, kde* $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x+a)$ *(pouze pro* $\Omega = \mathbb{R}^d$*),*

2. *škálování* T *koeficientem* $\lambda > 0$ *jako* $\langle s_\lambda T, \varphi\rangle = \langle T, \frac{1}{\lambda^d} s_{\frac{1}{\lambda}}\varphi\rangle$*, kde* $s_\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x)$ *(pouze pro* $\Omega = \mathbb{R}^d$*)*

3. *derivaci* T *vzhledem k multiindexu* α *jako* $\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\varphi\rangle$,

4. *násobení* T *funkcí* $h \in C^\infty(\Omega)$ *jako* $\langle hT, \varphi\rangle = \langle T, h\varphi\rangle$.

Poznámky a příklady. 1. *Platí* $x\delta = 0$ *a* $xT_{v.p.\frac{1}{x}} = 1$.

2. *Nechť* $h = \chi_{[0,\infty)}$*. Potom* $(T_h)' = \delta$ *a obecněji*

$$\langle (T_h)^{(k+1)}, \varphi\rangle = \langle (\delta)^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Definice 34 (konvergence v $\mathcal{D}'(\Omega)$)**.** *Říkáme, že posloupnost $\{T_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ konverguje v prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$ (nebo také konverguje slabě) k distribuci $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, pokud pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$, $n \to \infty$.*

Poznámky a příklady. *1. Je-li $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$, $f' \in L^1_{\text{loc}}$ a existují $f(a\pm)$ vlastní. Potom $(T_f)' = (f(a+) - f(a-))\delta_a + T_{f'}$.*

2. Pro $f(x) = \log |x|$ platí

$$(T_f)' = T_{v.p.\frac{1}{x}}, \quad \langle (T_f)'', \varphi \rangle = -p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}.$$

3. Pro $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ platí $T_{f_n} \to \delta$.

4. Pro $T_{\frac{1}{x \pm i0}} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0\pm} T_{\frac{1}{x \pm i\varepsilon}}$ platí

$$T_{\frac{1}{x \pm i0}} = T_{v.p.\frac{1}{x}} \mp i\pi\delta.$$

4.2 Temperované distribuce, Fourierova transformace, konvoluce

Definice 35 (prostor $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ a Fourieova transformace na něm)**.** *Prostor $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definujeme jako prostor všech lineárních zobrazení (funkcionálů) $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, která jsou spojitá v následujícím smyslu: pokud $\varphi_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}{\to} \varphi$, potom $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$, $n \to \infty$. Funkcionály patřící do $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ nazýváme temperované distribuce na $\mathbb{R}^d$.*

Je-li $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ potom definujeme Fourierovu transformaci T (zn. $\mathcal{F}(T)$) jako $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$ a inverzní Fourierovu transformaci T (zn. $\mathcal{F}^{-1}(T)$) jako $\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle$.

Poznámky a příklady. *1. Platí $L^1(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Například pro $f(x) = e^{x^2}$ platí $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

2. Na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ můžeme definovat operace posunutí, škálování, derivace a násobení funkcí stejně jako na $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, jedině u posledního se musíme omezit pouze na funkce mající nejvýše polynomiální růst v nekonečnu.

3. Pro $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ opět platí $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)) = T$.

4. Pro $f_a(x) = e^{i2\pi ax}$ platí $\mathcal{F}(T_{f_a}) = \delta_a$.

5. $\mathcal{F}(\cos(2\pi ax)) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$, $a \in \mathbb{R}$.

6. $\mathcal{F}(e^{i\lambda|x|^2}) = \left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{i\pi^2}{\lambda}|\xi|^2}$, $\lambda \neq 0$.

Definice 36 (konvoluce prvků $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$)**.** *Konvoluci $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definujeme jako $\langle \varphi * T, \phi \rangle = \langle T, R\varphi(x) * \phi \rangle$, kde $R\varphi(x) = \varphi(-x)$.*

Poznámky a příklady. *1. $\varphi * \delta = T_\varphi$,*

2. $\mathcal{F}(\varphi * T) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(T)$, $\mathcal{F}^{-1}(\varphi * T) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\mathcal{F}^{-1}(T)$.